Extensions de corps, éléments algébriques, anneaux

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ est irrationnel.

Exercice 2. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sur $\mathbf{Q}$?

Exercice 3. Soient K un corps et L une extension finie de K de degré m. Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré d.
(1) On suppose m et d premiers entre eux. Montrer que P est irréductible dans $L[X]$ (on pourra considérer une extension de L engendrée par une racine de P).
(2) Démontrer que le polynôme $X^{12}+30X^8+36X+24$ est irréductible sur $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{7})$.

Exercice 4. Désignons par α le réel $\sqrt{1+\sqrt{3}}$.
(1) Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$?
(2) Prouver que $K=\mathbf{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$.
(3) Calculer le degré de K sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 5. Soient p un nombre premier et K un corps. Soit $b \in K$; posons $Q(X)=X^p-b$.
(1) Soit $P(X)=X^d-a_1X^{d-1}+\cdots+(-1)^d a_d$ un facteur unitaire de Q. Montrer que $a_d^p=b^d$.
(2) En déduire que Q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si Q n'a pas de racine dans K.

Exercice 6. P our tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on choisit $\zeta \in \mathbf{C}$ une racine primitive n-ième de l'unité et on pose

$$\Phi_n(X)=\prod_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ \mathrm{pgcd}(k,n)=1}}(X-\zeta^k).$$

On veut montrer que Φ_n est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$.
(1) Montrer que $\prod_{d|n}\Phi_d(X)=X^n-1$. En déduire que $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$ et que le polynôme minimal de ζ appartient à $\mathbf{Z}[X]$.
(2) Soit p un nombre premier ne divisant pas n. Montrer que ζ et ζ^p ont même polynôme minimal (on pourra raisonner dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$).
(3) En déduire que Φ_n est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 7. Montrer que $\sqrt{5}+\sqrt{22+\sqrt{5}}=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{5}\sqrt{11-2\sqrt{29}}}$.

Exercice 8. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est euclidien.

Exercice 9. On considère l'anneau $A=\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$.
(1) À l'aide de la fonction $N\colon A\to\mathbf{N}$ définie par $N(z)=|z|^2$, déterminer $A^\times$, et montrer que 2 est un élément irréductible de A.
(2) L'anneau A est-il factoriel ?

Exercice 10. (1) Soient A un anneau factoriel, $a,b,c \in A\backslash\{0\}$ et $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si $ab=c^n$, alors il existe $a',b' \in A$ et $u,v \in A^\times$ tels que $a=ua'^n$ et $b=vb'^n$.
(2) Rappeler pourquoi $A=\mathbf{Z}[i]$ est factoriel et déterminer $A^\times$.
(3) Soient $x,y \in \mathbf{Z}$ tels que $y^3=x^2+1$.
  (i) Montrer que x est pair et y est impair.
  (ii) Prouver que $x+i$ et $x-i$ sont premiers entre eux dans A (on pourra montrer que si z est un diviseur commun de $x+i$ et $x-i$ dans A, alors $|z|^2$ divise 4 et x^2+1 dans $\mathbf{Z}$).
(4) En utilisant la question (1), déterminer tous les couples $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant $y^3=x^2+1$.
(5) En utilisant le même genre de raisonnement et un anneau A approprié, déterminer tous les couples $(x,y) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant $y^3=x^2+2$.