
EXTENSIONS DE CORPS, ÉLÉMENTS ALGÈBRIQUES, ANNEAUX

Exercice 1. Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ est irrationnel.

Exercice 2. Quel est le polynôme minimal de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ sur $\mathbf{Q}$?

Exercice 3. Soient K un corps et L une extension finie de K de degré m . Soit $P \in K[X]$ irréductible de degré d .

(1) On suppose m et d premiers entre eux. Montrer que P est irréductible dans $L[X]$ (on pourra considérer une extension de L engendrée par une racine de P).

(2) Démontrer que le polynôme $X^{12} + 30X^8 + 36X + 24$ est irréductible sur $\mathbf{Q}(\sqrt[5]{7})$.

Exercice 4. Désignons par α le réel $\sqrt{1 + \sqrt{3}}$.

(1) Trouver le polynôme minimal P de α sur $\mathbf{Q}$. Que vaut $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}]$?

(2) Prouver que $K = \mathbf{Q}(\alpha, i\sqrt{2})$ est une extension de décomposition de $P \in \mathbf{Q}[X]$.

(3) Calculer le degré de K sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 5. Soient p un nombre premier et K un corps. Soit $b \in K$; posons $Q(X) = X^p - b$.

(1) Soit $P(X) = X^d - a_1X^{d-1} + \dots + (-1)^da_d$ un facteur unitaire de Q . Montrer que $a_d^p = b^d$.

(2) En déduire que Q est irréductible dans $K[X]$ si et seulement si Q n'a pas de racine dans K .

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on choisit $\zeta \in \mathbf{C}$ une racine primitive n -ième de l'unité et on pose

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{pgcd}(k,n)=1}} (X - \zeta^k).$$

On veut montrer que Φ_n est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbf{Q}$.

(1) Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$. En déduire que $\Phi_n \in \mathbf{Z}[X]$ et que le polynôme minimal de ζ appartient à $\mathbf{Z}[X]$.

(2) Soit p un nombre premier ne divisant pas n . Montrer que ζ et ζ^p ont même polynôme minimal (on pourra raisonner dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}[X]$).

(3) En déduire que Φ_n est irréductible dans $\mathbf{Q}[X]$.

Exercice 7. Montrer que $\sqrt{5} + \sqrt{22 + \sqrt{5}} = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{5}\sqrt{11 - 2\sqrt{29}}}$.

Exercice 8. Montrer que l'anneau $\mathbf{Z}[j]$ est euclidien.

Exercice 9. On considère l'anneau $A = \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$.

(1) À l'aide de la fonction $N: A \rightarrow \mathbf{N}$ définie par $N(z) = |z|^2$, déterminer $A^\times$, et montrer que 2 est un élément irréductible de A .

(2) L'anneau A est-il factoriel ?

Exercice 10. (1) Soient A un anneau factoriel, $a, b, c \in A \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si $ab = c^n$, alors il existe $a', b' \in A$ et $u, v \in A^\times$ tels que $a = ua'^n$ et $b = vb'^n$.

(2) Rappeler pourquoi $A = \mathbf{Z}[i]$ est factoriel et déterminer $A^\times$.

(3) Soient $x, y \in \mathbf{Z}$ tels que $y^3 = x^2 + 1$.

(i) Montrer que x est pair et y est impair.

(ii) Prouver que $x + i$ et $x - i$ sont premiers entre eux dans A (on pourra montrer que si z est un diviseur commun de $x + i$ et $x - i$ dans A , alors $|z|^2$ divise 4 et $x^2 + 1$ dans $\mathbf{Z}$).

(4) En utilisant la question (1), déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant $y^3 = x^2 + 1$.

(5) En utilisant le même genre de raisonnement et un anneau A approprié, déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$ vérifiant $y^3 = x^2 + 2$.